

$$Exp(\lambda) : \quad EX = \frac{1}{\lambda}, \quad DX = \frac{1}{\lambda^2}$$

По определению

$$EX = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

Заменяем EX на выборочное среднее \bar{x}

$$EX = \bar{x} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \bar{x} \Rightarrow \hat{\lambda}_{MM} = \frac{1}{\bar{x}}$$

Альтернативная оценка через дисперсию – приравняем $DX = S^2$

$$\frac{1}{\lambda^2} = S^2 \Rightarrow \hat{\lambda}_{MM2} = \frac{1}{\sqrt{S^2}}$$

Функция правдоподобия

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n \cdot e^{-\lambda \sum x_i}$$

$$\ell(\lambda) = \ln L(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

Берем производную и приравниваем к нулю

$$\frac{d\ell}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum x_i = 0 \Rightarrow \hat{\lambda}_{MMP} = \frac{n}{\sum x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$$